Optimiser des données uncertaines

Michael Poss, thème RO

Parcours

- Licence en sciences mathématiques
  - *Université Libre de Bruxelles*
- Msc in Operational Research
  - *The University of Edinburgh*
  - *Mémoire à Orange labs*
- Doctorat en Recherche Opérationelle
  - *Université Libre de Bruxelles*
  - *Collaboration avec Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brésil)*
- Postdoctorat *Université de Aveiro*

Optimiser ...

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \leq 0, \quad i=1,\ldots,m \\ & x \in R^n \end{array}$$

Linéaire:
- Routage dans les réseaux
- SVM avec régularisation L^1
- Portefeuille
- ...

Optimiser ...

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \leq 0, \quad i=1,\ldots,m \\ & x \in R^n \end{array}$$

Linéaire

En nombre entiers:

- Conception de réseaux
- Tournées de véhicules
- Sac-à-dos

Optimiser ...

$$\begin{array}{ll} min & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \leq 0, \quad i=1,\dots,m \\ & x \in R^n \end{array}$$

Linéaire

En nombre entiers

Conique :

- SVM avec régularisation L^2
- Inégalités linéaires matricielles (contrôle ?)
- Liens avec l'optimisation robuste

Optimiser ...

En nombre entiers

$$
\begin{array}{ll}
min & f(x) \\
s.t. & g_i(x) \leq 0, \quad i=1,\dots,m \\
& x \in R^n
\end{array}
$$

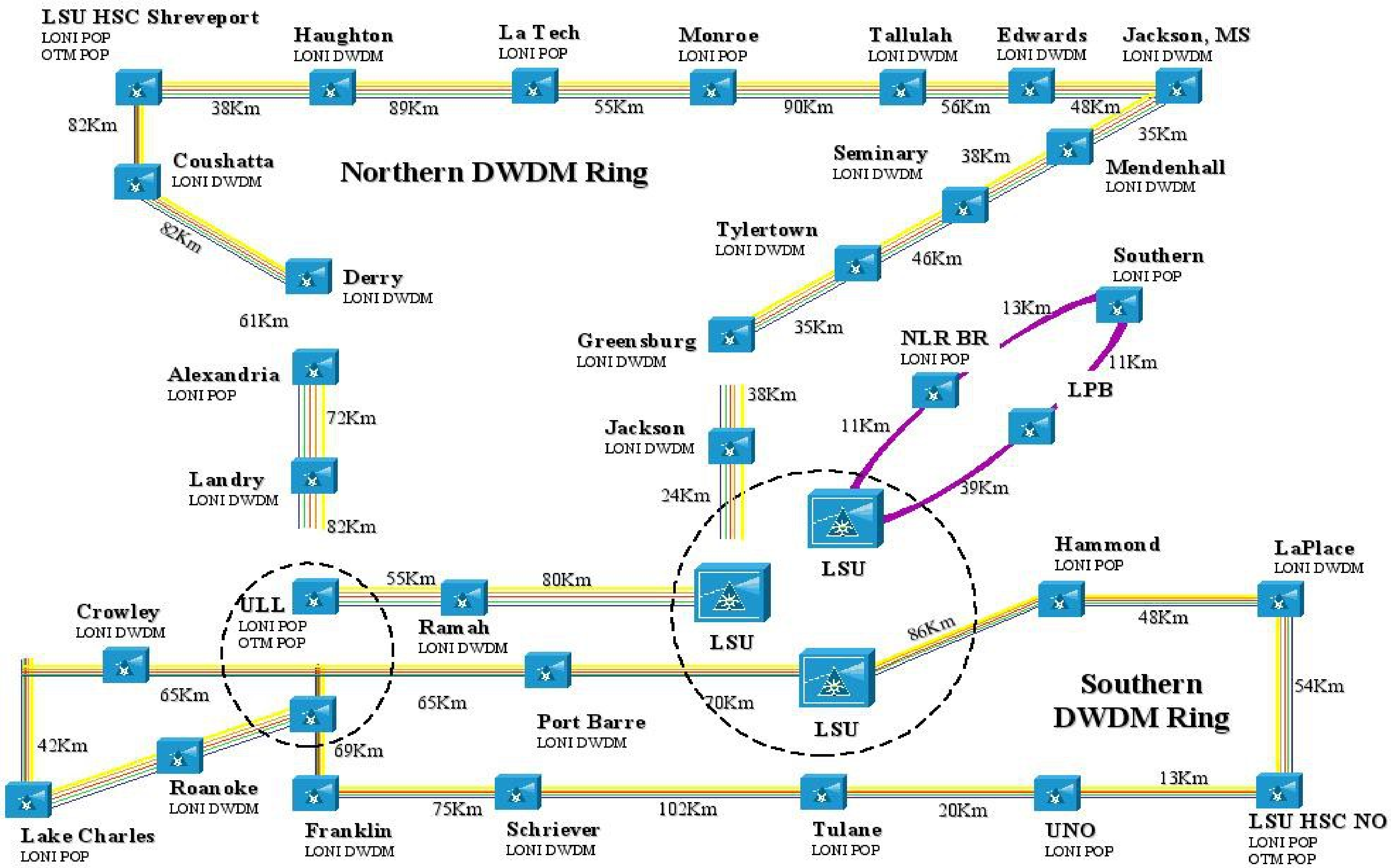
Linéaire

Conique :

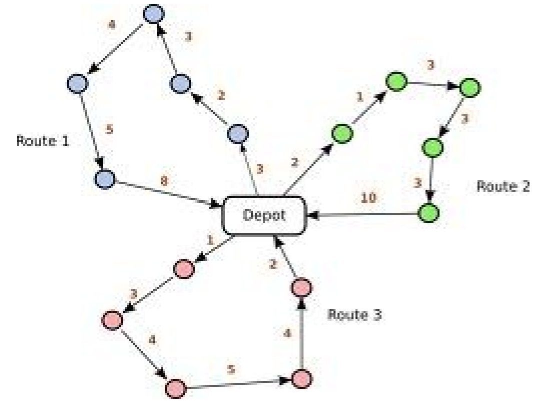
- SVM avec régularisation L^2
- Inégalités linéaires matricielles (contrôle ?)
- Liens avec l'optimisation robuste

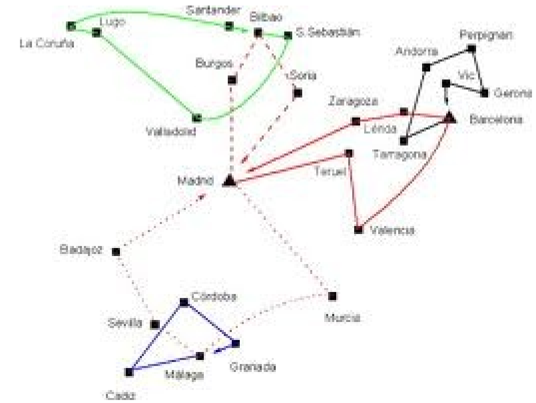
Des choses horribles … non-convexe, non-dérivable, difficile à calculer, ...

Télécommunications

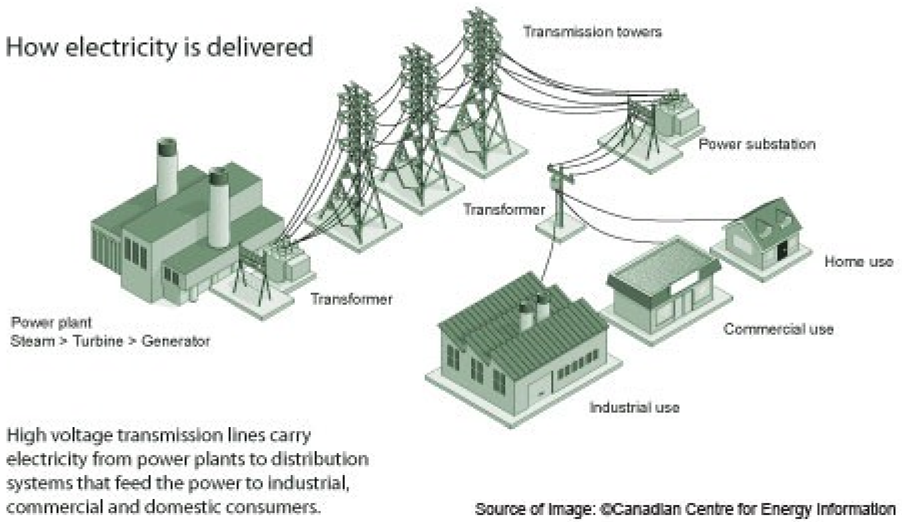


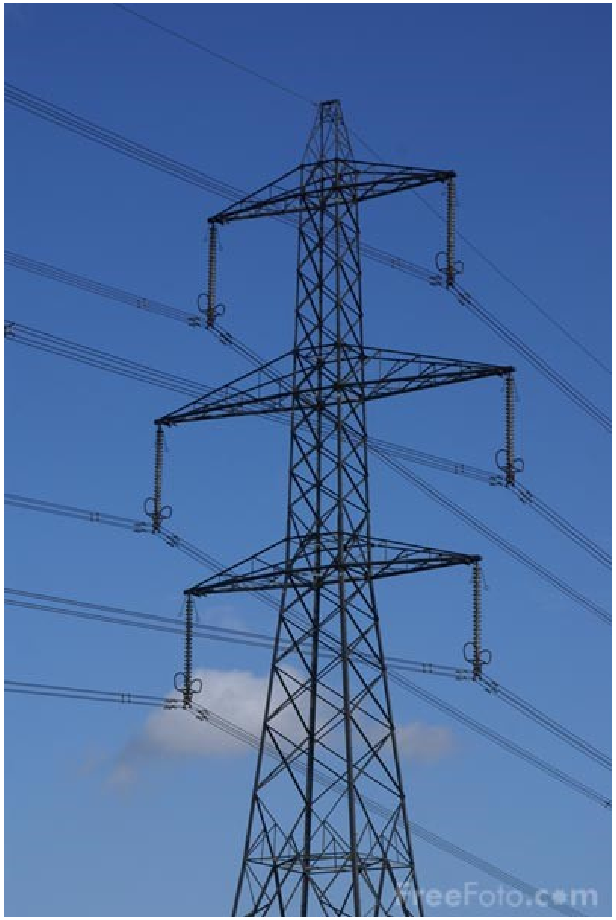
Transport maritime





Transmission électrique





… données incertaines

Explicitons la dépendance sur les paramètres :

$$\begin{array}{ll} min & f(x\,;c) \\ s.t. & g_i(x\,;a) \leq 0, \quad i=1,\ldots,m \\ & x \in R^n \end{array}$$

… données incertaines

Explicitons la dépendance sur les paramètres

Cas linéaire :

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \leq b \\ & x \in R^n \end{aligned}$$

Support vector machine :

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\| \\ s.t. \quad & y_i(\langle x, a_i\rangle + a_i^0) \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x \quad libres \end{aligned}$$

Réseaux de véhicules :

a représente la présence d'un lien entre deux véhicules

Importance de la structure

Contraintes coniques du second-ordre:

$$\begin{array}{rl} \min & c^T x \\ s.t. & \|Ax-b\| \le d^T x + f \\ & x \in R^n \end{array} \quad \ni \quad \begin{array}{rl} \min & c^T x \\ s.t. & x^T A' x + b'^T x + d' \le 0 \\ & x \in R^n \end{array}$$

$$\sqrt{\sum (Ax-b)_i^2} \qquad\qquad A' \sim PSD$$

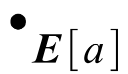
Incertitude

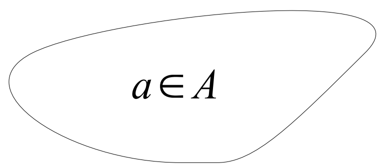
- Erreurs de mesure ou de prédiction
  - Durées de transport
  - Demande électrique dans 20 ans (Brésil)
  - Portefeuilles financiers
- Paramètres varient au cours du temps
  - Routage dans les réseaux de télécom
  - Structure/topologie d'un réseaux de véhicules change au cours du temps
  - Génération des barrages hydroéléctriques

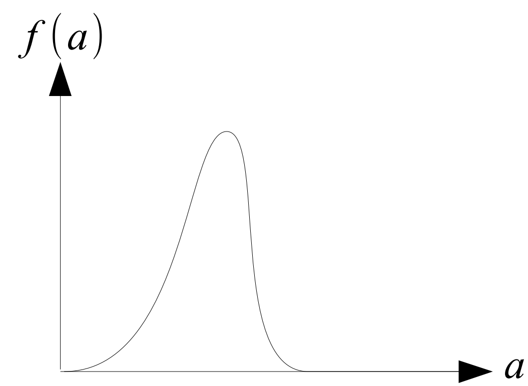
Que faire ?

- Modéliser l'incertitude

Valeur moyenne (Deterministique) | *Robuste* | *Stochastique*







- Inclure les paramètres incertains de manière intelligente :-)

Modèles

- Contrainte en probabilité

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & P(Ax \le b) > 1 - e \\ & x \in R^n \end{aligned}$$

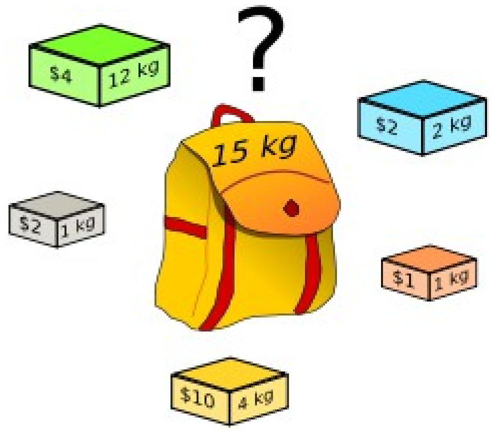
- Optimisation robuste

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \le b \qquad \forall a \in A \\ & x \in R^n \end{aligned}$$

- Programmation stochastique avec recours

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + E_a[k^T y(a)] \\ s.t. \quad & Ax + Ty(a) \le b \\ & x \in R^n \end{aligned}$$

Illustration : sac-à-dos



$$\begin{aligned} \max \quad & p^T x \\ s.t. \quad & w^T x \le b \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

- Robuste :

$$\boxed{\begin{aligned} \max \quad & p^T x \\ s.t. \quad & w^T x \le b, \forall w \in W \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}}$$

- Contrainte en probabilité :

$$\boxed{\begin{aligned} \max \quad & p^T x \\ s.t. \quad & P(w^T x \le b) \ge 1 - e \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}}$$

- Recours simple :

$$\boxed{\begin{aligned} \max \quad & p^T x - K E_w[y] \\ s.t. \quad & w^T x \le b + y(w) \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}}$$

Résultats théoriques

Theorem

Maximizing Z over B is in general $\mathcal{NP}$-hard. However, if $\left(p_i + \frac{Kw_i}{2(\overline{C}-\underline{C})}(2\underline{C} - w_i)\right) \geq 0$, *for each* $i \in \mathrm{N}$, *Z can be maximized in* $O(nK \sum w_i)$.

Theorem

Consider the problem

$$\max_{x \in B} \sum_{i \in N} \mu_i x_i - K\mathbb{E}_\xi \left[\max\left(0, \sum w_i(\omega)x_i - C(\omega)\right)\right],$$

where $w_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \lambda\mu_i)$ for $i \in N$, μ is an integer vector and C is a positive random variable. The problem is weakly $\mathcal{NP}$-hard as it can be solved by a pseudo-polynomial algorithm in $O(n\sum \mu_i)$.

Proposition

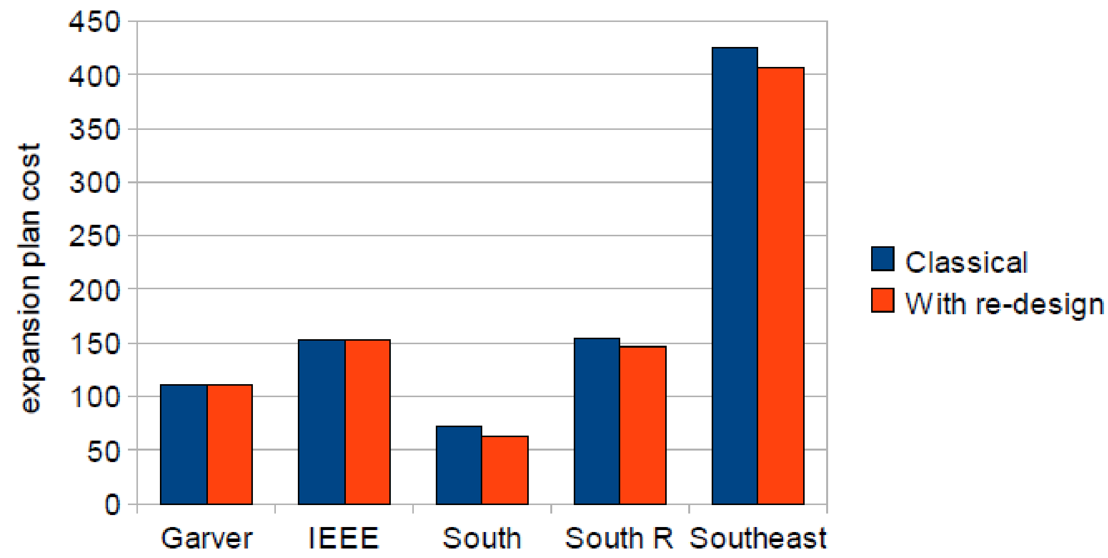
Problem (11) *is equivalent to*

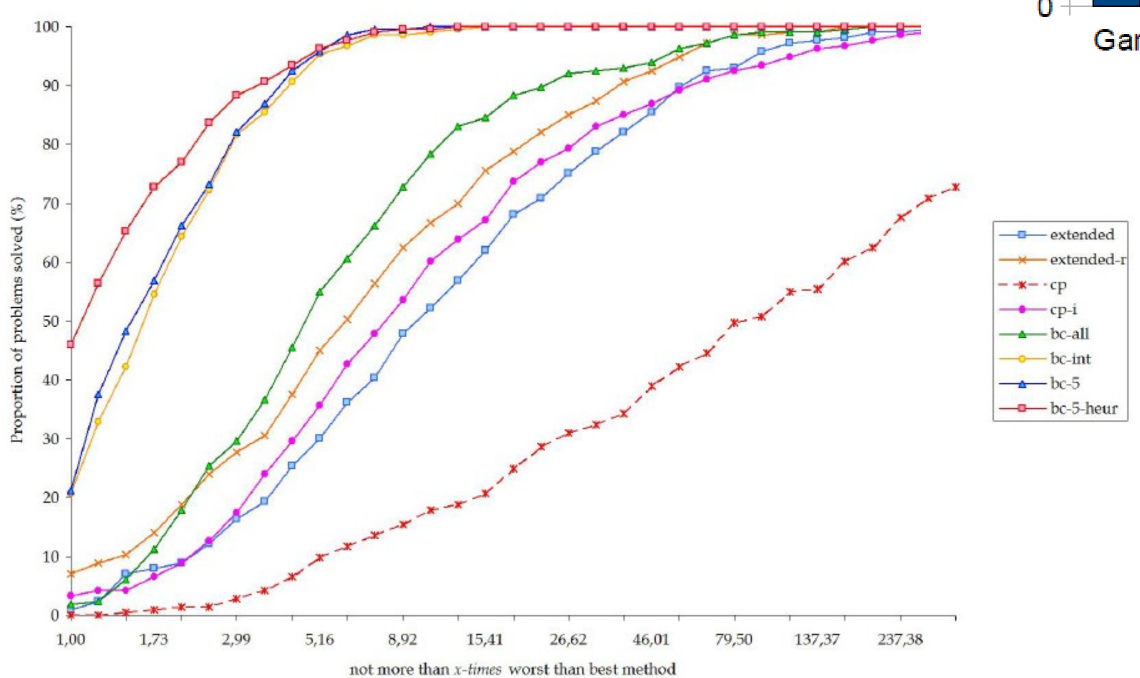
$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_2^2 + h(a) & \\ s.t. \quad & \omega_k = v_k^T a & k = 1,2 \\ & a \in \mathbf{U}^\Gamma & \end{aligned}$$

where $\lambda_1 < 0$ and $\lambda_2 > 0$ are the eigenvalues of the Hessian of $f(a)g(a)$, and v_1 and v_2 are their respective eigenvectors.

Résultats numériques

n	BC-frac	SDP
50	0.2	0.5
100	0.3	3.8
150	0.9	72
200	1.4	233





Incertitude variable

$$\boxed{w^T x \leq b \quad \forall w \in W \qquad \rightarrow \qquad P\left(w^T x \leq b\right) \geq 1 - e}$$

$$\boxed{w^T x \leq b \quad \forall w \in W\left(x\right) \qquad \rightarrow \qquad P\left(w^T x \leq b\right) \geq 1 - e}$$